

Enlaces algebraicos y trenzas



Miguel Martínez Larunce
Trabajo de fin del grado de Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Summary

Plane algebraic curves

In order to explain the problems in this article, this prologue is going to start explaining what plane algebraic curves are and how mathematicians work with this kind of objects.

A curve is the zero set of a polynomial function $f \in \mathbb{C}[X, Y]$ (with $\mathbb{C}[X, Y]$ the two variable polynomial ring). It is possible to see that there is a bijection between zero sets of polynomials $V \subset \mathbb{C}^2$ and radical ideals $I \subset \mathbb{C}[X, Y]$. This result, called *Hilbert's Nullstellensatz* or *Hilbert's Theorem of zeros* [4] allows to work with plane algebraic curves as if they were ideals of two variable polynomials. In particular, one can see that if a curve V given by a square-free polynomial f has the form $f = f_1 \cdots f_r$ with f_i an irreducible polynomial, then the bijection h between zero sets and ideals satisfies that $h(V) = \langle f \rangle$ (with $\langle f \rangle$ the ideal generated by f) and also $V = V_1 \cup \cdots \cup V_r$ with $h(V_i) = \langle f_i \rangle$ and finally $h(V) = h(V_1 \cup \cdots \cup V_r) = \langle f_1 \rangle \cap \cdots \cap \langle f_r \rangle$. For this reason all polynomials f in what follows will be assumed to be free of squares, in other words, *reduced*. From here and the fact that this *decomposition* is unique comes the definition of *irreducible component* of a curve, which are the V_i such that $V = V_1 \cup \cdots \cup V_r$.

In particular, one needs to study each irreducible component of the curve and then consider the structure of the resulting union of all of them. The goal of this article is to obtain analogous notions for the local study of curve singularities. In what follows the structure of the article will be explained, after that, each chapter will be summarized with more details so that the reader will know what to expect.

A general vision

The object of study here will be algebraic curves $V(f) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid f(x, y) = 0\}$ with a singularity at the point $a \in \mathbb{C}^2$. This is, $f(a) = 0$ and $\text{grad}(f)|_a = (0, 0)$.

Since f is assumed to be free of squares, except for the null function, singular points are isolated. As mentioned before, the purpose is to study irreducible components of f . Note that the concept of irreducibility for holomorphic functions is stronger than that of polynomials, since the ring of holomorphic functions at, say 0, is $\mathbb{C}\{x, y\}$ (the ring of convergent series) which contains $\mathbb{C}[x, y]$.

First of all, note that since this is going to be a local study of isolated singularities one can work as if the curve had just one singularity (if this is not the case, the study will classify each singularity by the structure of the curve in a *sufficiently small* neighborhood) and also, since there is a lineal change of variables that *moves* the singularity from a to 0, in particular, one can restrict to the study of algebraic curves $f(x, y) = 0$ with one singularity at 0.

With this, what is going to be shown is that each local irreducible component of the curve $f(x, y) = 0$ is, topologically, a disc. With this, the classification of the irreducible components will be given by the embedding of the disc in \mathbb{C}^2 . Finally one will have a result for local classification of singularities of algebraic curves in general (not only irreducible curves) which depends only on the discs embeddings of their irreducible components and the relative position

of these discs.

Chapter 1 review

This chapter tries to find a solution for the *neighborhood problem*, this is, given an arbitrary curve $f(x, y) = 0$ with a singularity at 0, how should the neighborhood be chosen to ensure that it is *sufficiently small*? The answer given in this chapter involves the concept of *germ*.

Chapter 2 review

Once the basic concept is clear, the article will follow in this chapter introducing some useful objects such as the *y-general functions*, (which in fact will not be functions, but germs), *Weierstrass polynomials* and *Newton polygons*. The first two will give more advanced results about a curve singularity. In the end, these three concepts will lead to the key of the article: the *Puiseux series*.

Chapter 3 review

This chapter begins with the definition of what *Puiseux series* are. This definition will be *natural* after chapter 2. With the Puiseux series comes the *Puiseux parametrizations* this is, a particular, finite set of local parametrizations of a given curve singularity. This last concept will be strongly bound with the proof of that an irreducible curve around a singularity is a *topological disc* in \mathbb{C}^2 , and with the study of its embedding.

This chapter ends with the study of the topological disc using its boundary, which is a knot K . One of the results obtained from the Puiseux parametrization is that K is in fact an *iterated torus knot*.

Chapter 4 review

In the previous chapter one can see that the study of singularities in algebraic curves can be solved by the study of iterated torus knots. The last chapter of this article will close the study by considering iterated torus knots in detail.

In particular, this chapter solves some iterated torus knot problems. Once one has done this, the study of singularities in algebraic curves will be well understood.

Índice general

Summary	iii
1 Gérmenes	1
1.1 Introducción	1
1.2 Gérmenes de funciones holomorfas	1
1.3 Gérmenes de conjuntos analíticos	2
2 Funciones y-generales	5
2.1 Introducción	5
2.2 Polinomios de Weierstrass	5
2.3 Polígonos de Newton	10
2.4 Existencia de soluciones	12
3 Entornos de la singularidad	13
3.1 Introducción	13
3.2 Series de Puiseux	13
3.3 Descomposiciones por toros sólidos.	14
3.4 Parametrizaciones de Puiseux y polidiscos de Milnor	15
4 Nudos Tóricos Iterados	21
4.1 Introducción	21
4.2 Funciones normales	21
4.3 El problema de los ejes.	22
Bibliografía	25

Capítulo 1

Gérmenes

1.1 Introducción

Una curva algebraica plana es el conjunto de ceros de una función polinómica $f(x, y)$. Se dice que un punto (x_0, y_0) de la curva es una *singularidad* cuando $f(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) = 0$.

Este trabajo consistirá en la clasificación topológica de los *entornos pequeños* de una singularidad, en particular, se va a realizar un estudio local de la curva en la singularidad.

Si en curvas algebraicas el estudio de una curva $f(x, y) = 0$ se realizaba mediante su factorización en polinomios irreducibles $f = f_1 \cdots f_r$ y trabajando con cada una de las *componentes irreducibles* de la curva de manera separada, aquí se realizará un análogo con las funciones holomorfas (que están bien definidas para entornos *suficientemente pequeños*) de manera que se buscará una *factorización local* de la curva. Esto es, se buscarán entornos para poder trabajar con funciones holomorfas en lugar de con funciones polinómicas. En particular, en este estudio una curva irreducible no será aquella que venga dada por una función $f(x, y) = 0$ con f un polinomio irreducible, sino aquella que venga dada por una función holomorfa (bien definida algún entorno de la singularidad, x_0) que no pueda ser factorizada como multiplicación de otras dos funciones holomorfas (salvo unidad) por muy pequeño que se tome el entorno de x_0 .

Para evitar preocupaciones como *¿Cuándo es un entorno suficientemente pequeño?* se introducirán en este capítulo las nociones de germen de función y de germen de conjunto analítico.

1.2 Gérmenes de funciones holomorfas

Definición 1.1. Sea $x_0 \in \mathbb{C}^n$, y sea el anillo $\mathbb{H}_{x_0}^n$ de todas las funciones holomorfas bien definidas en x_0 . Se define la relación sobre $\mathbb{H}_{x_0}^n$, \sim , como sigue: se dice que $f \sim g$, con $f, g \in \mathbb{H}_{x_0}^n$ si existe un entorno conexo de x_0 , $U \subset \mathbb{C}^n$, tal que $f|_U = g|_U$.

Nota 1.2. La relación \sim es una relación de equivalencia por el *principio de prolongación analítica*.

Definición 1.3. Los elementos de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, x_0} = \mathbb{H}_{x_0}^n / \sim$ se dominarán *gérmenes de funciones holomorfas*. En particular, si f es una función holomorfa en x_0 , se dirá que $[f]$ es el *germen de f* .

Observación 1.4. $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, x_0}$ es un anillo.

Definición 1.5. Se sabe que el conjunto de las series de potencias convergentes (con coeficientes en \mathbb{C}) en n variables es un anillo. Este anillo se denotará como $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$.

Proposición 1.6. $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, x_0}$ es isomorfo a $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$.

Demostración. Es inmediato por el *principio de prolongación analítica*. \square

Nota 1.7. A partir de aquí se hablará indistintamente de funciones y gérmenes de funciones puesto que solo se va a trabajar con estos últimos. En particular cuando se hable de una función definida en un entorno V se estará hablando del germen de la función que este definida en dicho entorno.

1.3 Gérmenes de conjuntos analíticos

Definición 1.8. Sean $X, U \subset \mathbb{C}^n$, donde U es un entorno abierto de un punto x_0 y $X \subset U$. Se dirá que X es analítico en x_0 si existe un entorno abierto V de x_0 en U y un número finito de funciones holomorfas f_1, \dots, f_r definidas sobre V tales que $X \cap V = \{z \in V \mid f_1(z) = \dots = f_r(z) = 0\}$

Definición 1.9. Sean $X, U \subset \mathbb{C}^n$ como antes, se dice que X es un subconjunto analítico de U (o que X es analítico en U) cuando X es analítico para todo punto $x \in U$.

Proposición 1.10. Si X es un conjunto analítico de U entonces X es cerrado en U .

Demostración. Sea $x \in U \setminus X$ y V como antes. Entonces $X \cap V$ será cerrado en V por ser una intersección finita de cerrados $\bigcap_{i=1}^r f_i^{-1}(0)$, por lo tanto existe un entorno $W \subset V$ de x disjunto con X . Desde que V es abierto se tiene que W es abierto en $U \setminus X$, en particular, se tiene que $U \setminus X$ es abierto. \square

Definición 1.11. Dado $x_0 \in \mathbb{C}^n$ se denotará el conjunto de entornos abiertos de x_0 como $E(x_0)$.

Definición 1.12. Sea $x_0 \in \mathbb{C}^n$ y sea \mathbb{A}_{x_0} el conjunto de todos los conjuntos analíticos en x_0 , es decir $\mathbb{A}_{x_0} = \{X \mid X \subset U, U \in E(x_0) \text{ y } X \text{ es analítico en } U\}$. Se define la relación \simeq sobre \mathbb{A}_{x_0} como sigue: se dice que $X \simeq X'$ con $X, X' \in \mathbb{A}_{x_0}$ tales que $X \subset U$ y $X' \subset U'$ si existe un entorno $V \subset U \cap U'$ tal que $X \cap V = X' \cap V$.

Nota 1.13. La relación \simeq es un relación de equivalencia.

Definición 1.14. Los elementos del conjunto \mathbb{A}_{x_0}/\simeq se denominarán *gérmenes de conjuntos analíticos*. En particular, dado un conjunto analítico X en algún entorno U de x_0 , entonces $[X]$ es el *germen de X* . En adelante, $[X]$ se denotará como (X, x_0) .

Definición 1.15. Dado un conjunto finito de funciones f_1, \dots, f_r , si $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$ es el ideal de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, x_0}$ generado por estas funciones, se dirá que el *conjunto germen generado por I* es $(X(f_1, \dots, f_r), x_0) = (X(I), x_0) = \{z \in U \mid f_1(z) = \dots = f_r(z), U \in E(x_0)\}$

Lema 1.16. Sean f_1, \dots, f_r y g_1, \dots, g_h dos familias distintas de gérmenes tales que $\langle f_1, \dots, f_r \rangle = \langle g_1, \dots, g_h \rangle$, entonces $(X(f_1, \dots, f_r), x_0) = (X(g_1, \dots, g_h), x_0)$

Demostración. Por estar $g_i \in \langle f_1, \dots, f_r \rangle \forall i = 1, \dots, h$ se tiene que $g_i = q_{1,i} \cdot f_1 + \dots + q_{r,i} \cdot f_r$ con $q_{j,i} \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$ en particular, $(X(f_1, \dots, f_r), x_0) \subset G$ con $G = \{z \in U \mid g_1(z) = \dots = g_h(z), U \in E(x_0)\}$ pero, desde que $f_j \in \langle g_1, \dots, g_h \rangle \forall j = 1, \dots, r$ se puede hacer el razonamiento análogo de manera que se llega a $(X(f_1, \dots, f_r), x_0) = G$ como se quería probar. \square

Observación 1.17. Se tiene que la Definición 1.15 es consistente para ideales finitamente generados.

Definición 1.18. El *ideal generado por el germen de un conjunto* X es el ideal $I((X, x_0)) \subset \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, x_0}$ formado por todas las funciones holomorfas $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, x_0}$ tal que f se anula en algún conjunto del germen (X, x_0) .

Proposición 1.19.

$$\begin{aligned} I_1 \subset I_2 &\Rightarrow (X(I_2), x_0) \subset (X(I_1), x_0) \\ X_1 \subset X_2 &\Rightarrow I((X_2, x_0)) \subset I((X_1, x_0)) \\ (X(I((X, x_0)), x_0), x_0) &= (X, x_0) \\ I &\subset I((X(I), x_0)) \end{aligned}$$

Demostración. Trivial. □

Nota 1.20. Observar que si la curva dada por la función $f(\mathbf{x}) = 0$ con $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ tiene una singularidad (aislada) $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ entonces la curva dada por la función $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a} + \mathbf{x})$ será la curva anterior trasladada, de manera que la singularidad estará ahora en el punto 0 de \mathbb{C}^n . En particular, en adelante se considerarán para el estudio de las curvas solo los gérmenes de conjuntos analíticos de la forma $(X, 0)$.

El objetivo de este trabajo será realizar una *clasificación satisfactoria* de los gérmenes de conjuntos analíticos $(X, 0)$ en \mathbb{C}^2 , para ello, la noción que puede parecer útil *a priori* es la de ser homeomorfo:

Definición 1.21. Se dirá que el germen de un conjunto analítico (X, x) es *homeomorfo* al germen (Y, y) , si existe un entorno abierto U de x en X y un entorno abierto V de y en Y tales que U y V son homeomorfos.

Nota 1.22. Más adelante se verá que esta noción es de hecho *demasiado flexible* para realizar el estudio de las singularidades, es por esto que se introduce una noción *más estricta* para realizar la clasificación de las singularidades de una curva.

Definición 1.23. Sean los gérmenes (X, x) y (Y, y) se dirá que son *topológicamente equivalentes* si existen dos entornos abiertos U y V de x e y respectivamente tales que hay un homeomorfismo $\phi : U \rightarrow V$ tal que $\phi(x) = y$ y $\phi(X \cap U) = Y \cap V$.

Observación 1.24. Si (X, x) es topológicamente equivalente a (Y, y) entonces (X, x) es homeomorfo a (Y, y) . El recíproco no es cierto.

Nota 1.25. El objetivo del estudio que se va a realizar es determinar cuando, dados dos gérmenes $(X, 0)$, $(Y, 0)$, $(X, 0)$ es topológicamente equivalente a $(Y, 0)$.

Capítulo 2

Funciones y -generales

2.1 Introducción

Ya se ha explicado que vamos a realizar un estudio local mediante el uso de ciertos anillos locales. En el capítulo que sigue introduciremos la característica de ser y -general que así como la de *polinomios de Weierstrass*, estas serán una noción esencial para trabajar con estos anillos (y con las singularidades que queremos estudiar).

La noción de ser y -general no solo será útil en el estudio de los anillos mentados anteriormente, sino que además, junto con la noción de *polígonos de Newton* que se introducirá más adelante permitirán parametrizar la curva de manera satisfactoria.

2.2 Polinomios de Weierstrass

Definición 2.1. Sea $g(\mathbf{x}, y) = g(x_1, x_2, \dots, x_n, y) \in \mathbb{C}\{\mathbf{x}, y\}$ una serie de potencias convergente, decimos que g es y -general (o y -regular) de orden k si $g(0, y) = \sum_{j \geq k} a_j y^j$, $a_k \neq 0$.

Nota 2.2. Si una función $f \in \mathbb{C}\{\mathbf{x}, y\}$ no es y -general, mediante un cambio de variable lineal genérico se puede obtener una función $g(\mathbf{x}, y) = f(\phi(\mathbf{x}, y), y)$ (con $\phi(\mathbf{x}, y) = (x_1 + \lambda_1 y, \dots, x_n + \lambda_n y)$ con $\lambda_i \in \mathbb{C}$ genéricos) que sea y -general.

Definición 2.3. Un polinomio $w(\mathbf{x}, y) = y^k + c_1(\mathbf{x})y^{k-1} + \dots + c_k(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}\{\mathbf{x}\}[y]$, se dirá que es un *polinomio de Weierstrass* si $c_i(0) = 0$, $\forall i = 1, \dots, k$.

Lema 2.4. Sea $F \in \mathbb{C}\{\mathbf{x}, y\}$. Existen únicos $Q(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{C}\{\mathbf{x}, y\}$ y $R(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}\{\mathbf{x}\}$ tal que $F(\mathbf{x}, y) = Q(\mathbf{x}, y) \cdot (y - x_i) + R(\mathbf{x})$.

Bajo las condiciones del Lema, $(y - x_i)$ divide a $F - R$. Además $R(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, x_i)$.

Demostración. Se toma $R(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, x_i)$. Se denota

$$F(\mathbf{x}, y) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(\mathbf{x}) y^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} h_{n,m}(\mathbf{x}^i) x_i^m y^n.$$

donde $\mathbf{x}^i = (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n)$. Entonces,

$$\begin{aligned} F - R &= F(\mathbf{x}, y) - F(\mathbf{x}, x_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} h_{n,m}(\mathbf{x}^i) x_i^m (y^n - x_i^n) = \\ &= (y - x_i) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} h_{n,m}(\mathbf{x}^i) x_i^m \frac{y^n - x_i^n}{y - x_i}. \end{aligned}$$

Como

$$\frac{y^n - x_i^n}{y - x_i} = y^{n-1} + x_i y^{n-2} + \cdots + x_i^{n-2} y + x_i^{n-1} = \Phi_{n-1}(x_i, y).$$

Y de aquí el resultado es directo con

$$Q(\mathbf{x}, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} h_{n,m}(\mathbf{x}^i) x_i^m \Phi_{n-1}(x_i, y).$$

Para ver la unicidad de R y Q , observar que si $F(\mathbf{x}, y) = Q(\mathbf{x}, y) \cdot (y - x_i) + R(\mathbf{x})$ entonces, evaluando en $y = x_i$ se tiene que $F(\mathbf{x}, x_i) = Q(\mathbf{x}, x_i) \cdot (y - x_i) + R(\mathbf{x}) = R(\mathbf{x})$ por consiguiente $R(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, x_i)$ siempre, y de aquí ya se ha visto que se deduce que $Q(\mathbf{x}, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} h_{n,m}(\mathbf{x}^i) x_i^m \Phi_{n-1}(x_i, y)$, y por lo tanto se tiene que Q y R son únicos, como se quería probar. \square

Lema 2.5. Para cada $F \in \mathbb{C}\{\mathbf{x}, y\}$ existe $Q \in \mathbb{C}\{\mathbf{x}, y\}$ y un polinomio $R \in \mathbb{C}\{\mathbf{x}\}[y]$ de grado $< k$ tal que $F = Q(y - x_1) \cdots (y - x_k) + R$.

Además, Q y R son únicos.

Demostración. Por el Lema 2.4 se tiene que :

$$\begin{aligned} F &= Q_1(y - x_1) + R_1, \quad (Q_1 \in \mathbb{C}\{x, y, z\}, R_1 \in \mathbb{C}\{x, z\}) \\ Q_1 &= Q_2(y - x_2) + R_2, \quad (Q_2 \in \mathbb{C}\{x, y, z\}, R_2 \in \mathbb{C}\{x, z\}) \\ &\vdots \\ Q_{k-1} &= Q_k(y - x_k) + R_k \quad (Q_k \in \mathbb{C}\{x, y, z\}, R_k \in \mathbb{C}\{x, z\}) \end{aligned}$$

De aquí se deduce que

$$F = Q_k(y - x_1) \cdots (y - x_k) + R_1 + (y - x_1)R_2 + \cdots + (y - x_1)(y - x_2) \cdots (y - x_{k-1})R_k,$$

es decir, $F = Q(y - x_1) \cdots (y - x_k) + R$.

Con esto se tiene la existencia, y la unicidad se deduce directamente del Lema 2.4, por lo que se tiene lo que se deseaba probar. \square

Teorema 2.6 (Teorema de división especial). Sea $p_k(\mathbf{z}, y) \in \mathbb{C}\{\mathbf{z}\}[y] \subset \mathbb{C}\{\mathbf{x}, \mathbf{z}\}[y]$, donde $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_k)$, el polinomio general de grado k , es decir,

$$p_k(\mathbf{z}, y) = y^k + \sum_{i=1}^k z_i y^{k-i}.$$

Entonces, para cada $f(\mathbf{x}, \mathbf{z}, y) \in \mathbb{C}\{\mathbf{x}, \mathbf{z}, y\}$ existe $q \in \mathbb{C}\{\mathbf{x}, \mathbf{z}, y\}$ y un y -polinomio

$$r(\mathbf{x}, \mathbf{z}, y) = \sum_{i=0}^k A_i(\mathbf{x}, \mathbf{z}) y^{k-i} \in \mathbb{C}\{\mathbf{x}, \mathbf{z}\}[y]$$

de grado $\leq k - 1$ tal que $f = qp_k + r$

Demostración. Sea σ_i la i -ésima función elemental simétrica en t_1, \dots, t_k . Se sustituye $z_i := \sigma_i(\mathbf{t})$. Entonces se obtiene la descomposición del polinomio general en factores lineales:

$$p_k(z, y) = y^k + z_1 y^{k-1} + \cdots + y_k = (y - t_1) \cdots (y - t_k)$$

Se quiere dividir la función $f(\mathbf{x}, \mathbf{z}, y)$ por el polinomio general. Para ello se define la siguiente función:

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{t}, y) := f(\mathbf{x}, \mathbf{z}, y)$$

y se sabe, por el Lema 2.5 que se tiene la siguiente igualdad:

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{t}, y) := Q(\mathbf{x}, \mathbf{t}, y) \cdot (y - t_1) \cdots (y - t_k) + R(\mathbf{x}, \mathbf{t}, y),$$

Q y R son simétricas, esto es, invariantes bajo permutación de las variables t_1, \dots, t_n , ya que estas permutaciones no afectan a el polinomio F y el polinomio $(y - t_1) \cdots (y - t_k)$ queda fijado, por lo que Q y R deben de ser invariantes desde que son únicos. Aplicando el *Teorema fundamental de funciones simétricas* [2], se sabe que hay una función holomorfa $q(\mathbf{x}, \mathbf{z}, y) \in \mathbb{C}\{\mathbf{x}, \mathbf{z}, y\}$ y el polinomio $r(\mathbf{x}, \mathbf{z}, y)$ de grado $< k$ en y con coeficientes en $\mathbb{C}\{\mathbf{x}, y\}$ tal que

$$q(\mathbf{x}, \sigma_1(\mathbf{t}), \dots, \sigma_n(\mathbf{t}), y) = Q(\mathbf{x}, \mathbf{t}, y) \text{ y } r(\mathbf{x}, \sigma_1(\mathbf{t}), \dots, \sigma_n(\mathbf{t}), y) = R(\mathbf{x}, \mathbf{t}, y).$$

Y por lo tanto $f(\mathbf{x}, \sigma_1(\mathbf{t}), \dots, \sigma_n(\mathbf{t}), y) = q(\mathbf{x}, \sigma_1(\mathbf{t}), \dots, \sigma_n(\mathbf{t}), y) \cdot (y^k + \sigma_1(t)y^{k-1} + \dots + \sigma_k(t)) + r(\mathbf{x}, \sigma_1(t), \dots, \sigma_k(t), y)$ y como la aplicación de \mathbb{C}^k en \mathbb{C}^k que lleva (t_1, \dots, t_n) a $(\sigma_1(\mathbf{t}), \dots, \sigma_n(\mathbf{t}))$ es sobreyectiva, se tiene el resultado deseado. \square

Proposición 2.7. Sea $g \in \mathbb{C}\{\mathbf{x}, y\}$ una función y -general satisfaciendo

$$g(\mathbf{x}, y) = q(\mathbf{x}, \mathbf{z}, y) \cdot (y^k + z_1 t^{k-1} + \dots + z_k) + r(\mathbf{x}, \mathbf{z}, y); \quad (2.1)$$

entonces se tiene que

$$\frac{\partial A_i}{\partial z_j}(0, 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ -c & \text{si } i = j \end{cases}$$

donde $c \neq 0$ es el coeficiente que acompaña a y^k en la serie $g(0, y)$.

Demostración. Notar que si $\mathbf{x} = \mathbf{z} = 0$ la ecuación 2.1 queda como $g(0, y) = q(0, 0, y) \cdot (y^k + 0 \cdot y^{k-1} + \dots + 0) + r(0, 0, y) = q(0, 0, y) \cdot t^k + \sum_{i=1}^k A_i(0, 0) \cdot y^{k-i}$ por lo que $A_i(0, 0) = 0 \forall (\mathbf{x}, \mathbf{z})$ desde que g es y -general de orden k . De manera análoga se tiene que $q(0, 0, y)$ debe de ser una serie de potencias $q(0, 0, y) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$ con coeficiente $a_0 = c \neq 0$.

Ahora, diferenciando ambos lados de la ecuación 2.1 respecto a z_j se sigue el siguiente resultado (para $\mathbf{x} = \mathbf{z} = 0$):

$$0 = \frac{\partial q}{\partial z_j}(0, 0, y) \cdot y^k + q(0, 0, y) \cdot y^{k-j} + \frac{\partial A_1}{\partial z_j}(0, 0) \cdot y^{k-1} + \dots + \frac{\partial A_k}{\partial z_j}(0, 0)$$

De aquí se deduce que $\frac{\partial A_i}{\partial z_j}(0, 0) = 0 \forall i = j + 1, \dots, k$ y $\frac{\partial A_j}{\partial z_j}(0, 0) = -q(0, 0, 0) = -c$ y así se tiene lo que se quería probar. \square

Teorema 2.8 (Teorema de preparación de Weierstrass). Sea $g \in \mathbb{C}\{\mathbf{x}, y\}$ una función y -general de orden k , entonces se tiene que

$$g(\mathbf{x}, y) = u(\mathbf{x}, y) \cdot (y^k + c_1(\mathbf{x})y^{k-1} + \dots + a_k(\mathbf{x}))$$

con $c_i(0) = 0$ y $u = (0, 0) \neq 0$. Además c_i y u son únicos.

Demostración. Notar que $g(\mathbf{x}, y) = g(\mathbf{x}, \mathbf{z}, y)$ por lo que por el *Teorema de la división especial* se tiene que:

$$g(\mathbf{x}, y) = q(\mathbf{x}, \mathbf{z}, y) \cdot (y^k + z_1 t^{k-1} + \dots + z_k) + r(\mathbf{x}, \mathbf{z}, y)$$

Con $r(\mathbf{x}, \mathbf{z}, y) = \sum_{i=1}^k A_i(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \cdot y^{k-i}$ se tiene entonces por la proposición anterior que:

$$\frac{\partial A_i}{\partial z_j}(0, 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ -c & \text{si } i = j \end{cases} \quad (2.2)$$

En particular, se tiene que la matriz $\frac{\partial A_i}{\partial z_j}$ es rectangular superior con determinante $(-c)^k \neq 0$. Las funciones $A_i(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ satisfacen entonces las hipótesis del *Teorema de la función implícita* (véase [1, página 25]) por lo que se sabe que existen unas funciones $z_j(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}\{\mathbf{x}\}$, con $z_j(0) = 0$ satisfaciendo que $A_i(\mathbf{x}, z_1(\mathbf{x}), \dots, z_k(\mathbf{x})) = 0 \ \forall i = 1, \dots, k$. Mediante el cambio $z = z(\mathbf{x})$ en la ecuación 2.1 se tiene que

$$g(\mathbf{x}, y) = q(\mathbf{x}, \mathbf{z}(\mathbf{x}), y) \cdot (y^k + z_1 t^{k-1} + \dots + z_k) + r(\mathbf{x}, \mathbf{z}(\mathbf{x}), y) = q(\mathbf{x}, \mathbf{z}(\mathbf{x}), y) \cdot (y^k + z_1 t^{k-1} + \dots + z_k)$$

Luego si $u(\mathbf{x}, y) = q(\mathbf{x}, \mathbf{z}(\mathbf{x}), y)$ se tiene que $g(\mathbf{x}, y) = u(\mathbf{x}, y) \cdot (y^k + c_1(\mathbf{x})y^{k-1} + \dots + a_k(\mathbf{x}))$ con $u(0, 0) = q(0, 0, 0) = c \neq 0$.

Con esto queda probada la existencia, ahora se verá la unicidad:

Sea $q = \tilde{u} \cdot (y^k + \tilde{c}_1 t^{k-1} + \dots + \tilde{c}_k) = u \cdot (y^k + c_1 t^{k-1} + \dots + c_k)$. Lo que se ha visto hasta ahora de este mismo teorema nos dice que si $U = W \times V$ es un entorno del 0 suficientemente pequeño para que $u, \tilde{u} \neq 0$, los ceros de $(y^k + c_1(\mathbf{x})t^{k-1} + \dots + c_k(\mathbf{x}))$ y $(y^k + \tilde{c}_1(\mathbf{x})t^{k-1} + \dots + \tilde{c}_k(\mathbf{x}))$ estarán en V para cierto $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ suficientemente pequeño (recordar que $c_i(0) = 0$ y que son continuas desde que son las funciones del Teorema de la función implícita), desde que $u \neq 0$ los ceros de estos dos polinomios serán los ceros de $g(\mathbf{x}, y)$ en V y por tanto, $(y^k + c_1(\mathbf{x})t^{k-1} + \dots + c_k(\mathbf{x}))$ y $(y^k + \tilde{c}_1(\mathbf{x})t^{k-1} + \dots + \tilde{c}_k(\mathbf{x}))$ tendrán los mismos ceros y por tanto coincidirán. Es decir, tomando \mathbf{x} suficientemente pequeño, se tendrá que $c_i(\mathbf{x}) = \tilde{c}_i(\mathbf{x})$, de donde se sigue que $c_i = \tilde{c}_i$ y por tanto $u = \tilde{u}$.

Y así se tiene lo que se quería probar. \square

Nota 2.9. El Teorema de Weierstrass no solo es útil para el estudio de gérmenes de funciones holomorfas, además da una noción intuitiva de lo que es una función y -general (que de hecho ya se ha visto en la demostración de la unicidad): dada una curva $g(\mathbf{x}, y) = 0$, si esta es y -general, entonces cumple que en algún entorno del 0 existen k soluciones.

Teorema 2.10 (Teorema de división). *Sea $f, g \in \mathbb{C}\{\mathbf{x}, y\}$ con g y -general de orden k . Entonces existe $q \in \mathbb{C}\{\mathbf{x}, y\}$ y un polinomio $r \in \mathbb{C}\{\mathbf{x}\}[y]$ de grado $\leq k - 1$ tal que*

$$r(\mathbf{x}, y) = \sum_{i=1}^k a_i(\mathbf{x}) \cdot y^{k-i} \quad (a_i(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}\{\mathbf{x}\})$$

con $f = q \cdot g + r$, con q, r únicos.

Demostración. Sea g y -regular de orden k y $f \in \mathbb{C}\{\mathbf{x}, y\}$ notar que $g(\mathbf{x}, y) = g(\mathbf{x}, \mathbf{z}, y)$, $f(\mathbf{x}, y) = f(\mathbf{x}, \mathbf{z}, y)$ por lo que por el *Teorema de la división especial* se tiene que

$$g = q(\mathbf{x}, \mathbf{z}, y) \cdot p_k + r(\mathbf{x}, \mathbf{z}, y)$$

$$f = \tilde{q}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, y) \cdot p_k + \tilde{r}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, y)$$

donde r y \tilde{r} son y -polinomios de grado $\leq k - 1$ con coeficientes en $\mathbb{C}\{\mathbf{x}, \mathbf{z}\}$. Desde que $r(\mathbf{x}, \mathbf{z}, y) = \sum_{i=1}^k A_i(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \cdot y^{k-i}$ se sigue de la proposición 2.7 que:

$$\frac{\partial A_i}{\partial z_j}(0, 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ -c & \text{si } i = j \end{cases} \quad (2.3)$$

En particular, se tiene que la matriz $\frac{\partial A_i}{\partial z_j}$ es rectangular superior con determinante $(-c)^k \neq 0$. Las funciones $A_i(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ satisfacen entonces las hipótesis del *Teorema de la función implícita* (véase [1, página 25]) por lo que se sabe que existen unas funciones $z_j(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}\{\mathbf{x}\}$, con $z_j(0) = 0$ satisfaciendo que $A_i(\mathbf{x}, z_1(\mathbf{x}), \dots, z_k(\mathbf{x})) = 0 \ \forall i = 1, \dots, k$. Mediante el cambio $z = z(\mathbf{x})$ en la ecuación 2.1 se tiene que

$$g(\mathbf{x}, y) = q(\mathbf{x}, \mathbf{z}(\mathbf{x}), y) \cdot (y^k + z_1 t^{k-1} + \dots + z_k) + r(\mathbf{x}, \mathbf{z}(\mathbf{x}), y) = q(\mathbf{x}, \mathbf{z}(\mathbf{x}), y) \cdot (y^k + z_1 t^{k-1} + \dots + z_k)$$

Luego, las igualdades anteriores quedan:

$$g = q(\mathbf{x}, \mathbf{z}(\mathbf{x}), y) \cdot p_k$$

$$f = \tilde{q}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, y) \cdot p_k + \tilde{r}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, y)$$

En particular, $g(\mathbf{x}, y) = q(\mathbf{x}, \mathbf{z}(\mathbf{x}), y) \cdot (y^k + z_1 t^{k-1} + \dots + z_k)$, de donde se sigue que (desde que $q(0, 0, 0) \neq 0$ es una unidad) $p_k = g(\mathbf{x}, y) \cdot q^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{z}(\mathbf{x}), y)$ y por tanto se tiene que

$$f(\mathbf{x}, y) = \tilde{q}(\mathbf{x}, \mathbf{z}(\mathbf{x}), y) \cdot q^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{z}(\mathbf{x}), y) \cdot g(\mathbf{x}, y) + \tilde{r}(\mathbf{x}, \mathbf{z}(\mathbf{x}), y) = \hat{q}(\mathbf{x}, y) \cdot g(\mathbf{x}, y) + \hat{r}(\mathbf{x}, y)$$

Con esto queda probada la existencia, falta probar la unicidad. Supongamos $f = q_1 \cdot g + r_1 = q_2 \cdot g + r_2$, entonces $r_1 - r_2 = (q_2 - q_1) \cdot g$. Por el *Teorema de preparación de Weierstrass* sabemos que $g(\mathbf{x}, y)$ tiene k ceros, contados con multiplicidad, en un entorno de $0 \in \mathbb{C}$ para cierto \mathbf{x} suficientemente pequeño, por tanto, si $r_1(\mathbf{x}, y) - r_2(\mathbf{x}, y)$ no fuese el polinomio nulo, se tendría que $r_1(\mathbf{x}, y) - r_2(\mathbf{x}, y)$ es un polinomio de grado $\leq k - 1$ con al menos k ceros, lo cual no es posible. Por tanto, $r_1 - r_2 = 0$ de donde se deduce $r_1 = r_2$ y por tanto $q_1 = q_2$.

Y así queda probado lo que se quería probar. \square

De estos dos últimos teoremas se deducen los siguientes resultados (véase [1, página 25]):

Teorema 2.11. (*Teorema de la base de Rückert*) El anillo $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$ de series de potencias convergentes en n variables satisface que todo ideal es finitamente generado.

Observación 2.12. Los ideales generados por gérmenes de conjuntos son finitamente generados. En particular, siempre se cumplirá la condición de la que se hablaba en la Observación 1.17.

Lema 2.13. Todo polinomio de Weierstrass $h \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_{n-1}\}[x_n]$ es reducible si y solo si es reducible en $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$. Mas aun, cuando h es reducible, entonces todos los factores son polinomios de Weierstrass salvo unidades.

Proposición 2.14. $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$ es un dominio de factorización única.

Definición 2.15. Si R es un anillo e $I \subset R$ es un ideal, entonces se define el *radical de I* como

$$\sqrt{I} := \{f \in R \mid f^k \in I \text{ para cierto } k\}$$

Teorema 2.16. (*Teorema de ceros de Rückert*) El ideal del germen de un conjunto analítico satisface que

$$\sqrt{I} = I(X(I))$$

2.3 Polígonos de Newton

En los apartados anteriores se ha visto que, en el caso general, existe una función implícita $y(\mathbf{x})$ que es solución de la curva $g(\mathbf{x}, y) = 0$ con g y -general. Ahora, restringiendo a \mathbb{C}^2 vamos a buscar un proceso para encontrar estas soluciones (puesto que se está trabajando con gérmenes, en realidad se va a encontrar la función en algún entorno de la singularidad). Se trabajará entonces con $g(x, y) = \sum a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$ una serie de potencias y -general de orden k . Lo primero será introducir la noción de polígonos de Newton que será fundamental para poder proceder:

Definición 2.17. Sea $A \subset \mathbb{C}$ un conjunto. Se define la *clausura convexa* del conjunto como $\text{Conv}(A) = \{\sum_{i=1}^m \alpha_i p_i \mid p_i \in A, \alpha_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \forall i\}$

Definición 2.18. Sea $f(x, y) = \sum a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$, una serie de potencias en $\mathbb{C}\{x, y\}$ se llamará *conjunto de exponentes* de f a el conjunto $\Delta(f) = \{(\alpha, \beta) \mid a_{\alpha\beta} \neq 0\}$

Definición 2.19. Dado $p \in \mathbb{R}^2$, el *cuadrante positivo desplazado* de p es $p + (\mathbb{R}^+)^2 := \{p + c \mid c = x + y, x, y \in \mathbb{R}^+\}$.

Definición 2.20. Sea $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$. El *polígono de Newton* de f , $\text{Pn}(f)$, es la unión de las caras compactas del borde $\partial(\overline{\text{Conv}(\bigcup_{p \in \Delta(f)} \{p + (\mathbb{R}^+)^2\})})$.

Ejemplo 2.21. Sea la función $y^4 - x^6$, se tiene que $\Delta(f) = \{(0, 4), (6, 0)\}$ por lo que se tiene que si se considera $\bigcup_{p \in \Delta(f)} p + (\mathbb{R}^+)^2$ (ver Figura 2.1)

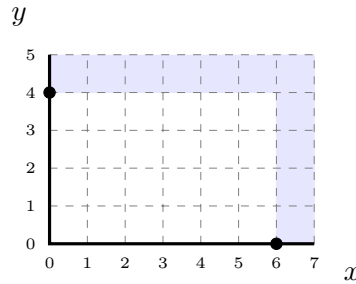


Figura 2.1:

a continuación, se computa $\partial(\overline{\text{Conv}(\bigcup_{p \in \Delta(f)} \{p + (\mathbb{R}^+)^2\})})$ (ver Figura 2.2). Así, si $\ell_{(a,b)}^{(a',b')}$ es la arista entre $(a, b), (a', b')$, se tiene que $\text{Pn}(f)$ es $\{(4, 0), (6, 0), \ell_{(0,4)}^{(6,0)}\}$.

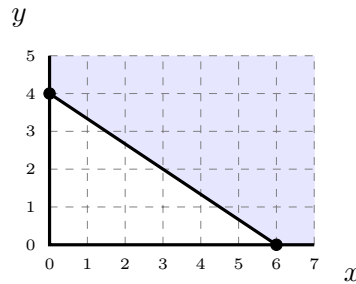


Figura 2.2:

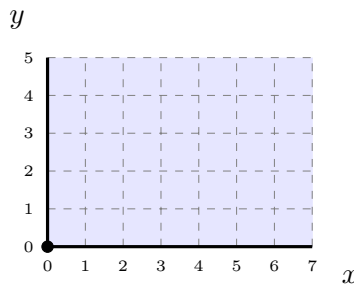


Figura 2.3:

Ejemplo 2.22. Sea $f = (y^2 - x^3)^2 + x^7$ se tendrá que $\Delta(f) = \{(0, 4), (2, 3), (6, 0), (7, 0)\}$ y por tanto $\text{Pn}(f) = \{(0, 4), (2, 3), (6, 0), \ell_{(0,4)}^{(2,3)}, \ell_{(2,3)}^{(6,0)}\} = \{(0, 4), (2, 3), (6, 0), \ell_{(0,4)}^{(6,0)}\}$. Con lo que de hecho, se tiene el mismo polígono de Newton que en el ejemplo 2.21.

Ejemplo 2.23. Si f es de la forma $a + \sum a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$ con $a \neq 0$ una constante (es decir, si f es una unidad) se tiene que, independientemente de $\Delta(f)$, $\partial(\text{Conv}(\bigcup_{p \in \Delta(f)} \{p + (\mathbb{R}^+)^2\})) = \mathbb{R}^+$, en particular, $\text{Pn}(f) = \{(0, 0)\}$. (Ver Figura 2.3)

Ahora, sea $g = \sum a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$ una función y -general de orden k . Se va a realizar un proceso para hallar alguna solución explícita $y(x)$ (ya hemos visto antes implícitamente que existe alguna solución) a la curva $g(x, y) = 0$.

Caso 1: $\text{Pn}(g)$ es un solo punto. Entonces se tiene que $f(x, y) = y^m g(x, y)$ con $g(0, 0) \neq 0$. Por lo tanto $y \equiv 0$ es solución de la curva $f(x, y) = 0$ y ya se tiene y en función de x como $y(x) = 0$.

Caso 2: $\text{Pn}(g)$ tiene más de un punto. Se considera entonces la arista del polígono de Newton pasando por $(0, k)$. Observar que todos los puntos (α, β) de esta arista satisfacen que $\alpha + \mu_0 \beta = \nu = \mu_0 \cdot k$ para cierto μ_0 (en el plano de las α -abscisas y las β -ordenadas). La recta que contiene a esta arista es $\ell = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha + \mu_0 \beta = \nu\}$.

Se satisface que $(\alpha_0, \beta_0), (0, m) \in \ell$, notar que por construcción (la pendiente de la recta será negativa) se tiene que $\mu_0, \nu > 0$, en particular, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ cumpliendo que $\exists a_{\alpha, \beta} \neq 0$ se tendrá que $\alpha + \mu_0 \beta \geq \nu$. Por todo esto se tiene que $f(x, y) = \sum_{\alpha + \mu_0 \beta = \nu} a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta + \sum_{\alpha + \mu_0 \beta > \nu} a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$.

Se toma entonces $\hat{f} = \sum_{\alpha + \mu_0 \beta = \nu} a_{\alpha\beta} = 0$ y se realiza el cambio de variable $y = tx^{\mu_0}$, observar que así se tiene que $\hat{f} = x^\nu (\sum_{\alpha + \mu_0 \beta = \mu_0 m} a_{\alpha\beta} t^\beta) = x^\nu g(t)$ donde $g(t)$ es un polinomio de grado k . Desde que sabemos que existen al menos dos $a_{\alpha\beta}$ distintos de cero sabemos que el polinomio $g(t)$ tiene una raíz distinta de 0, t_0 .

Observando que μ_0 es racional con $\mu_0 = \frac{p_0}{q_0}$ donde p_0, q_0 son números naturales relativamente primos, se considera entonces $y_0 = s_0 x^{\mu_0}$ con $s_0^{q_0} = t_0$, y sustituyendo $x_1 := x^{\frac{1}{q_0}}$ de manera que el cambio anterior queda como $y_0 = s_0 x_1^{p_0}$, finalmente, sustituyendo de nuevo $y = x_1^{p_0} (s_0 + y_1)$ la curva inicial $f(x, y) = 0$ quedará como $f(x_1^{q_0}, x_1^{p_0} (s_0 + y_1)) = x^{\nu q_0} f_1(x_1, y_1)$ con $f_1(x_1, y_1)$ y_1 -general de orden $k_1 \leq k$ desde que $f = \sum_{\alpha + \mu_0 \beta = \nu} a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta + \sum_{\alpha + \mu_0 \beta > \nu} a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$.

Si f_1 cumple la condición del caso 1, de nuevo se tendrá que $y_1 \equiv 0$ y el proceso termina, sin embargo, si f_1 cumple la condición del caso 2, entonces se repetirá el proceso utilizando $\mu_1 = \frac{p_1}{q_1}, x_2 := x_1^{\frac{1}{q_1}}, y_1 = x_2^{p_1} (s_1 + y_2)$ y se tendrá que $f_1(x_2^{q_1}, x_2^{p_1} (s_1 + y_2)) = x_2^{\nu_1 q_1} f_2(x_2, y_2)$ con f_2 y_2 -general de orden $k_2 \leq k_1$.

De esta manera se tiene, en general, que para cada $i \in \mathbb{N}$, $f_i(x_i, y_i)$, $y_i \equiv 0$ en caso de que f_i cumpla la condición del caso 1 y, en caso contrario $y_i = x_i^{\mu_i} (s_i + y_{i+1})$, con lo que, desde que $y = x^{\mu_0} (s_0 + y_1) = x^{\mu_0} (s_0 + x_1^{\mu_1} (s_1 + x_2^{\mu_2} (s_2 + \dots))) = s_0 x^{\mu_0} + s_1 x^{\mu_0 + \frac{\mu_1}{q_0}} + s_2 x^{\mu_0 + \frac{\mu_1}{q_0} + \frac{\mu_2}{q_0 q_1}} + \dots$

2.4 Existencia de soluciones

La función $y(x)$ obtenida en el proceso anterior es claramente una solución de $g(x, y) = 0$ si el proceso infinito, pero puede ser (si nunca se da que para cierto $i \in \mathbb{N}$, $y_i \equiv 0$) que dicho proceso sea infinito. Se va a buscar afirmar que la serie infinita resultante del proceso en este último caso también es solución de $g(x, y)$. Para responder a esta pregunta, primero se verán algunas importantes propiedades de las series $y(x)$:

Lema 2.24. Sean y_i, y_{i+1} como en el apartado anterior y k_i, k_{i+1} los ordenes de estas funciones respectivamente. Si μ_i no es un entero $\Rightarrow k_i > k_{i+1}$

Demostración. Lo que se va a probar es que si $k_i = k_{i+1}$, entonces $i \in \mathbb{N}$.

Sin perdida de generalidad se toma el caso $i = 0$.

Sustituyendo $x = x_1^{q_0}, y = x_1^{p_0}(s_0 + y_1)$ en la ecuación $f(x, y) = \sum_{\alpha+\mu_0\beta=\nu} a_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta + \sum_{\alpha+\mu_0\beta>\nu} a_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta$ se obtiene que

$$x^{\nu q_0} f_1(x_1, y_1) = f(x_1^{q_0}, x_1^{p_0}(s_0 + y_1)) = x^{\nu q_0} \left(\sum_{\alpha+\mu_0\beta=\mu_0 m} a_{\alpha\beta} x^\alpha (s_0 + y_1)^\beta + x_1(\dots) \right).$$

De aquí se sigue que $f_1(0, y_1) = \sum_{\alpha+\mu_0\beta=\mu_0 m} a_{\alpha\beta} (s_0 + y_1)^\beta = g(s_0 + y_1)$.

Recordar que $s_0^{q_0} = t_0$ es una raíz distinta de 0 de la ecuación $g(t) = 0$, y g es un polinomio de grado $k = k_0$, además, k_1 es el orden del cero $y_1 = 0$ en la función $f(0, y_1)$, por lo tanto es el orden del cero t_0 en la función $g(t)$.

Desde que se tiene que $k_0 = k_1$ se sabe que la función $g(t)$ es de la forma $g(t) = c(t - t_0)^m$ con $c \neq 0$. En particular, el coeficiente t^{m-1} en el polinomio $g(t) = \sum_{\alpha+\mu_0\beta=\mu_0 m} a_{\alpha\beta} t^\beta$ no se anula, esto es, $a_{\alpha\beta} \neq 0$ para cierto $\alpha \in \mathbb{N}$ que cumple $\alpha + \mu_0(m-1) = \mu_0 m$. De aquí se sigue que $\mu_0 = \alpha \in \mathbb{N}$ y se tiene lo que queríamos probar. □

Ahora, se tiene el siguiente teorema como resultado del lema anterior:

Teorema 2.25. Existe un índice i_0 tal que μ_i siempre es un entero $\forall i \geq i_0$.

Por tanto $q_i = 1$ y $x_{i+1} = x_i \forall i \geq i_0$, por lo tanto $n := q_0 q_1 q_2 q_3 \dots q_{i_0}$. Es decir, y es una series de potencias en $x^{\frac{1}{n}}$.

Demostración. Las series f_i son y_i -generales de orden k_i , con k_i cumpliendo que $k_0 \geq k_1 \geq \dots \geq k_n \geq \dots$. Notar que, por el lema anterior, μ_i solo no será entero cuando $k_i > k_{i+1}$ lo cual solo puede ocurrir un número finito de veces, así, se tiene entonces que $y(x) = \sum a_i x^{\frac{1}{n}}$. Por construcción, $f(x, y(x)) \equiv 0$ por lo que $y(x)$ es una solución de la curva $f(x, y) = 0$ y se tiene lo que se quería probar. □

Se observa que para cualquier numero k , la serie $g(x, y(x))$ tiene que tener un orden mayor que k ya que, por construcción, $g(x, y(x))$ se anula en y^k . En particular el orden de $g(x, y(x))$ es ∞ y esto solo pasa si $g(x, y(x)) = 0$. Así, se tiene que aunque $y(x)$ sea una serie infinita, se puede asegurar que es una solución de la curva $g(x, y) = 0$.

Capítulo 3

Entornos de la singularidad

3.1 Introducción

Lo que se pretende mostrar en este capítulo es que la estructura de los entornos de cualquier singularidad es de hecho la de un disco, en particular, tomando una *circunferencia* de este *disco* se tendrá un nudo (que a su vez será el borde del *disco*). Serán estos nudos los que permitirán realizar una clasificación de las singularidades. Las series vistas en el capítulo anterior, que ahora se denotarán *series de Puiseux* serán la clave para demostrar estos resultados.

3.2 Series de Puiseux

Definición 3.1. Una serie de la forma $y(x^{\frac{1}{n}}) = \sum a_i x^{\frac{i}{n}}$ se dice una *serie de Puiseux*.

Definición 3.2. Una serie de Puiseux que es solución a una ecuación $f(x, y) = 0$ se dice que es *serie de Puiseux para la curva con ecuación $f(x, y) = 0$* .

Nota 3.3. Ya se ha visto que dada una curva $g(x, y) = 0$ *y-general*, existe al menos una solución que es una serie de Puiseux.

Proposición 3.4. Sea $y(x) \in \mathbb{C}\{x\}$ una serie y sea n un número natural positivo tal que para toda serie de Puiseux $y(x^{\frac{1}{k}})$ cumpliendo que $y(x^{\frac{1}{n}}) = y(x^{\frac{1}{k}})$ se tiene que $n \leq k$. Entonces existe una única curva irreducible $g(x, y) = 0$ *y-general* de orden n tal que la serie de Puiseux $y(x^{\frac{1}{n}})$ es solución de dicha curva.

Demostración. Se define la función $\exp_n(x) = x^n$ y se considera la función $y(t) = y(\exp_{1/n}(x))$. Se tiene que ver entonces que para la serie $y(t)$ existe una única $g(x, y)$ *y-general* irreducible de orden n tal que $g(t^n, y(t)) = 0$. Sea $\xi_n = e^{2\pi i k/n}$ una raíz primitiva n -ésima de la unidad. Observar en primer lugar que el polinomio $p(t, y) \in \mathbb{C}\{t\}[y] \subset \mathbb{C}\{t, y\}$ definido como

$$p(t, y) = (y - y(t)) \cdot (y - y(\xi_n t)) \cdot \dots \cdot (y - y(\xi_n^{n-1} t))$$

es invariante por la transformación $\phi(t) = \xi_n t$. Esto es claro ya que

$$p(\xi_n t, y) = (y - y(\xi_n t)) \cdot (y - y(\xi_n^2 t)) \cdot \dots \cdot (y - y(\xi_n^n t)) = p(t, y).$$

Dado un anillo A , se va a definir $K(A)$ como su cuerpo de fracciones. Observar que si $p(t, y) = (y - y(t)) \cdot (y - y(\xi_n t)) \cdot \dots \cdot (y - y(\xi_n^{n-1} t))$ se tiene que $p \in K(\mathbb{C}\{t, y\})$, lo que se va a probar es que $p \in K(\mathbb{C}\{t^n, y\})$. Se tiene además que si ϕ es la acción dada por $t \mapsto \xi_n t$, $\phi \in \text{Gal}(K(\mathbb{C}\{t, y\})/K(\mathbb{C}\{t^n, y\}))$. Observar además que ϕ es de orden exactamente n , en particular, $|\langle \phi \rangle| = n = [K(\mathbb{C}\{t, y\}) : K(\mathbb{C}\{t^n, y\})]$ por tanto $\text{Inv}(\phi) = K(\mathbb{C}\{t^n, y\}) \Rightarrow p \in$

$K(\mathbb{C}\{t, y\}) \cap \mathbb{C}\{t\}[y]$ y además $p \in \text{Inv}(\phi)$ luego $p \in K(\mathbb{C}\{t^n, y\}) \cap \mathbb{C}\{t, \} [y]$ por lo que p es un polinomio cuyos coeficientes son series en t^n .

Pasamos ahora a la irreducibilidad. De nuevo se considera un polinomio $p(t, y) = (y - y(t)) \cdot (y - y(\xi_n t)) \cdot \dots \cdot (y - y(\xi_n^{n-1} t))$ observar que si p es irreducible en $\mathbb{C}\{t^n\}[y]$ entonces g (dada como antes) es irreducible en $\mathbb{C}\{x, y\}$. Será esto lo que se va a probar. Se probará primero que si p no tiene ceros múltiples es irreducible y luego se verá que p no puede tener ceros múltiples.

Si se supone que p no es irreducible y no tiene ceros múltiples, entonces $p = p_1 \cdot \dots \cdot p_r$ donde p_i son mónicos, irreducibles en $\mathbb{C}\{t^n\}[y]$ y no todos iguales. En particular son invariantes por la acción $t \mapsto \xi_n t$ pero observar que tomando (sin pérdida de generalidad) $i = 1$, p_1 solo puede ser invariante si $p_1(t, y) = (y - y(t)) \cdot (y - y(\xi_n t)) \cdot \dots \cdot (y - y(\xi_n^{n-1} t))$ es decir, si $p_1 = p$, con lo que p sería irreducible, lo cual es una contradicción provocada por suponer que p no es irreducible. Por tanto, p es irreducible y se tiene que $g(x, y)$ es una función y -general irreducible determinada únicamente por $g(t^n, y) = p(t, y)$.

Ahora, si p tiene ceros múltiples entonces para ciertos $j, i \in \{0, \dots, n-1\}$ con $i \neq j$. Se supone, sin pérdida de generalidad, que $i > j$. Ahora, se tiene que $y(\xi_n^i t) = y(\xi_n^j t)$ en particular $y(\xi_n^i x^{\frac{1}{n}}) = y(\xi_n^j x^{\frac{1}{n}})$, es decir, si $y(x) = \sum a_h x^h$ se tiene que $\sum a_h (\xi_n^i x^{\frac{1}{n}})^h = \sum a_h (\xi_n^j x^{\frac{1}{n}})^h$ lo cual solo puede ocurrir si $(\xi_n^i)^h = (\xi_n^j)^h \forall h \geq h_0$ con h_0 el menor número natural tal que $a_{h_0} \neq 0$ lo que significa, en particular, que $(i-j)h_0 = n \cdot d$ para cierto número entero d , pero observar que desde que n el menor número natural en el que es posible expresar la serie de Puiseux $y(x^{\frac{1}{n}})$ se tiene que k_0 y n son relativamente primos, en particular esto implica que n divide a $i-j$ lo cual no es posible ya que $0 < (i-j) < n$ lo cual es una contradicción provocada por la suposición de que p tiene ceros múltiples y así se tiene lo que se quería probar. \square

Observación 3.5. Por construcción, se tiene que las soluciones de la curva $g(x, y) = 0$ siempre serán series de Puiseux. Más aun, si $y(x^{\frac{1}{n}})$ es una solución para la curva $g(x, y) = 0$ entonces todas las soluciones de la curva serán de la forma $y(\xi_n t)$ donde $t^n = x$ y ξ_n es una raíz n -ésima de la unidad.

3.3 Descomposiciones por toros sólidos.

Se realiza aquí un breve inciso antes de continuar trabajando con las series de Puiseux para introducir algunas nociones que serán útiles.

Definición 3.6. Se dice que el conjunto $U_{\epsilon, \delta} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x| < \epsilon, |y| < \delta\}$ es un *polidisco*.

Lema 3.7. Dado un conjunto de la forma $A = \{x \in \mathbb{C} \mid |x| \leq \epsilon\} \times \{y \in \mathbb{C} \mid |y| \leq \delta\}$ entonces se tiene que el borde de A , ∂A es de la forma

$$\partial A = \{x \mid |x| = \epsilon\} \times \{y \mid |y| \leq \delta\} \cup \{x \mid |x| \leq \epsilon\} \times \{y \mid |y| = \delta\}.$$

Notación 3.8. Se consideran los siguientes toros sólidos:

$$T^+ = \{x \mid |x| = \epsilon\} \times \{y \mid |y| \leq \delta\}, \quad T^- = \{x \mid |x| \leq \epsilon\} \times \{y \mid |y| = \delta\},$$

$$T_+ = \{(x, y) \in \mathbb{S}_n \mid |y| \leq \delta\}, \quad T_- = \{(x, y) \in \mathbb{S}_n \mid |x| \leq \epsilon\}$$

Observación 3.9. Notar que dado cualquier polidisco $U_{\epsilon, \delta}$ y cualquier esfera \mathbb{S}_n^2 con $n^2 = \epsilon^2 + \delta^2$ por el Lema 3.7 se tiene que $\mathbb{S}_n^2 = T_+ \cup T_-$ y $\partial U_{\epsilon, \delta} = T^+ \cup T^-$.

Definición 3.10. La anterior expresión de una esfera (o del borde de un polidisco) se denominará descomposición en toros sólidos de la esfera (o del borde del polidisco).

Proposición 3.11. *El borde del polidisco $U_{\epsilon,\delta} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x| \leq \epsilon, |y| \leq \delta\}$ es homeomorfo a la esfera compleja $\mathbb{S}_n^2 = \{z \in \mathbb{C}^2 \mid \|z\| = n\}$ con n cumpliendo que $n^2 = \epsilon^2 + \delta^2$*

Demostración. Se consideran las aplicaciones $T_+ \rightarrow T^+$ dada por $(x, y) \mapsto (\frac{\epsilon x}{|x|}, y)$ y $T_- \rightarrow T^-$ dada por $(x, y) \mapsto (x, \frac{\delta y}{|y|})$. Estas dos aplicaciones son obviamente homeomorfismos, y por tanto podemos construir a través de ellas un homeomorfismo $\phi : \mathbb{S}_n^2 \rightarrow \partial U_{\epsilon,\delta}$ y tenemos lo que queríamos probar. \square

3.4 Parametrizaciones de Puiseux y polidiscos de Milnor

El siguiente teorema es el punto clave del estudio del entorno de la curva, con él se podrá realizar la clasificación que se estaba buscando. Observar que la clave de dicho teorema (y que de hecho es la clave de todo este trabajo) será que las series de Puiseux, y el hecho de que toda solución de $f(x, y) = 0$ es una serie de Puiseux nos van a permitir realizar conjunto finito de parametrizaciones de la curva de la forma $(z^n, y(z))$ que nos darán toda la información que necesitamos para trabajar en los entornos de la singularidad:

Teorema 3.12. *Sea $f(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$ una función y -general de orden $k > 0$ e irreducible. Se define $B := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \delta^{\frac{1}{k}}\}$. Entonces existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo ϵ tal que $0 < \epsilon < \epsilon_0$ existe cierto $\delta > 0$ cumpliendo que si $X := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid f(x, y) = 0\}$ es el lugar de ceros de f entonces la función $h : B \rightarrow X \cap U_{\epsilon,\delta}$ dada por $h(z) = (z^k, y(z))$ es un homeomorfismo holomorfo en X , es más, la restricción $h : B \setminus \{0\} \rightarrow (X \cap U_{\epsilon,\delta}) \setminus \{0\}$ es un biholomorfismo.*

Demostración. Por ser f y -general, se puede suponer sin pérdida de generalidad que f es un polinomio de Weierstrass.

Ahora, observar que f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son relativamente primos por ser f irreducible, de aquí se sigue que el discriminante $disc_y f \in \mathbb{C}\{x\}$ es una serie tal que $disc_y f \neq 0$ por tanto, llamando $\Delta = disc_y f$ y tomando un $\epsilon_0 > 0$ suficientemente pequeño se tiene que $\Delta(x) \neq 0 \forall x$ tal que $0 < |x| < \epsilon_0$. En particular, el conjunto de ceros comunes a f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $\{x \mid 0 < |x| < \epsilon_0\}$ es el vacío.

Se sabe que para cierto $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño existe un δ tal que para todo $x_0 \in D_\delta = \{x \in \mathbb{C} \mid |x| < \delta\}$ el polinomio $f(x_0, y)$ tiene exactamente k ceros (contados con multiplicidad) en el polidisco $U_{\epsilon,\delta}$.

Es obvio que si $\epsilon_1 > 0$ es suficientemente pequeño como para cumplir la primera condición (no hay ceros comunes entre f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $\{x \mid |x| < \epsilon_0\}$) y $\epsilon_2 > 0$ es suficientemente pequeño como para cumplir la segunda condición (existe δ tal que $f(x_0, y)$ tiene k ceros en $U_{\epsilon,\delta}$) entonces $\epsilon_0 = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ cumple ambas condiciones, así como todo $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < \epsilon_0$.

Así, si δ es suficientemente pequeño y si $x_0 \in D_\delta \setminus \{0\}$, entonces $\frac{\partial f}{\partial y}$ es no nulo en el conjunto de ceros de $f(x_0, y)$, esto es, la ecuación $f(x_0, y) = 0$ tiene k ceros simples. Si y_0 es uno de estos ceros entonces el Teorema de la función implícita dará una función holomorfa $\bar{y}(x)$ y un entorno que localmente parametriza X . En particular $X \cap U_{\epsilon,\delta}$ es por lo tanto una superficie alrededor de (x_0, y_0) y la proyección $X \cap U_{\epsilon,\delta} \rightarrow D_\delta$ dada por $(x, y) \mapsto x$ es localmente biholomorfa alrededor de (x_0, y_0) . En particular, la restricción de la proyección $(X \cap U_{\epsilon,\delta}) \setminus \{0\} \rightarrow D_\delta \setminus \{0\}$ es un espacio recubridor conexo.

Pero se sabe por teoría de cubiertas [1] que este espacio recubridor de $D_\delta \setminus \{0\}$ se parece al espacio recubridor $B \setminus \{0\} \rightarrow D_\delta \setminus \{0\}$ dado por $z \mapsto z^m$, de manera mas precisa, si se toma $z_0 \in B \setminus \{0\}$ y $y_0 \in \mathbb{C}$ con $f(z_0^k, y_0) = 0$ entonces hay un homeomorfismo único $h : B \setminus \{0\} \rightarrow X \setminus \{0\}$ cumpliendo $h(z_0) = (z_0^k, y_0)$ y hace que el siguiente diagrama sea conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 (x, y) \in X \setminus \{0\} & \longleftarrow & B \setminus \{0\} & \ni z & \\
 \downarrow & \searrow & \swarrow & \downarrow & \\
 x & & \mathbb{D}_\delta \setminus \{0\} & & z^m
 \end{array}
 \quad \square$$

Observación 3.13. En esta demostración no solo se ha visto que X es homeomorfo a B sino una cosa más, esta es, $X \setminus \{0\} \rightarrow D_\delta \setminus \{0\}$ es un espacio recubridor conexo de k hojas.

Observación 3.14. Como el teorema es cierto $\forall \epsilon$ tal que $0 < \epsilon < \epsilon_0$ se tiene que $(X \setminus \{0\}) \cap \partial U_{\epsilon, \delta}$ es biholomorfo a una circunferencia contenida en $B \setminus \{0\}$, es decir, es un nudo. No solo eso, es además un espacio recubridor de una circunferencia de centro 0 contenida en $D_\delta \setminus \{0\}$ desde que $(X \setminus \{0\}) \cap U_{\epsilon, \delta}$ es espacio recubridor de $D_\delta \setminus \{0\}$.

Nota 3.15. Los polidiscos $U_{\epsilon, \delta}$ para los que se ha comprobado que el Teorema 3.12 se cumple dependen, en realidad, solamente de ϵ ya que en realidad siempre podemos asegurar la existencia de un $\delta = \delta(\epsilon)$ si $0 < \epsilon < \epsilon_0 \ll 1$, en particular, los $U_{\epsilon, \delta}$ de los que se puede asegurar que se cumple el teorema dependen solo de ϵ , esto motiva la siguiente definición.

Definición 3.16. Una aplicación de la forma $h(z) = (z^k, y(z))$ se llamará *parametrización de Puiseux*.

Nota 3.17. En la nota 1.22 se explicó que la noción de homeomorfismo no es suficiente para realizar una clasificación satisfactoria de los gérmenes de las singularidades de las curvas, ahora es posible ver el motivo.

Corolario 3.18. Todos los gérmenes de conjuntos analíticos irreducibles 1-dimensionales en 0 $((X(f), 0)$ con $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ irreducible) son homeomorfos a $(\mathbb{C}, 0)$.

Demostración. Basta tomar el abierto de $B \subset \mathbb{C}$ y cualquier parametrización de Puiseux es un homeomorfismo en un abierto de $(X(f), 0)$. \square

Definición 3.19. Los polidiscos $U_{\epsilon, \delta}$ del Teorema 3.12 se denominan *polidiscos de Milnor* y se denotarán como \mathbb{M}_ϵ . Se denominarán así por John Milnor, que fue quien primero definió este tipo de polidiscos.

Observación 3.20. Obviamente si \mathbb{M}_ϵ es un polidisco de Milnor entonces $\epsilon < \epsilon_0$.

Nota 3.21. La observación 3.9 y la proposición 3.11 son ciertas para los polidiscos de Milnor, \mathbb{M}_ϵ , pero en este caso particular, los resultados solo dependerán de ϵ ya que $\delta = \delta(\epsilon)$ y $n = n(\epsilon, \delta) = n(\epsilon)$.

Observación 3.22. La proposición 3.11, junto con el Teorema 3.12 dice lo siguiente: dada una curva irreducible y -general de orden k , $f(x, y) = 0$ se tiene que, si X es el lugar de ceros de f entonces $X \cap \mathbb{M}_\epsilon$ es homeomorfo a un disco complejo $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \delta^{\frac{1}{k}}\}$ lo que significa que $X \cap \partial \mathbb{M}_\epsilon = X \cap \mathbb{S}_n^2$ es homeomorfo a ∂B . Más aún, desde que $X \setminus \{0\}$ es un espacio recubridor conexo de k hojas que viene definido por el espacio recubridor conexo $\phi : B \setminus \{0\} \rightarrow D_\delta \setminus \{0\}$ dado por $z \mapsto z^k$ (y desde que $0 \notin X \cap \mathbb{S}_n^2$) se tiene que $X \cap \mathbb{S}_n^2$ es un espacio recubridor de la circunferencia compleja ∂D_δ de k hojas, que se sabe que solo puede ser recubierta por la propia circunferencia [3]. Dicho de manera más intuitiva, $X \cap \mathbb{S}_n^2$ cuando \mathbb{S}_n^2 es suficientemente pequeño es una circunferencia compleja que esta *encajada* en \mathbb{C}^2 de manera extraña, es decir, es un nudo. Es este nudo el que permitirá más adelante (solventados ciertos problemas que se presentarán al final del capítulo) caracterizar las singularidades de las curvas.

La pregunta natural que surge tras las observaciones es, dada una curva algebraica con una singularidad ¿Cómo se construye el nudo al que es homeomorfa localmente dicha singularidad? Esta será la motivación de los siguientes teoremas y definiciones.

Definición 3.23. Dada una serie de Puiseux $y(x^{\frac{1}{n}}) = \sum a_k x^k$. Sea k_1 el número no entero más pequeño que aparece en los exponentes de $y(x)$, entonces $k_1 = \frac{n_1}{m_1}$ para ciertos n_1, m_1 relativamente primos, en caso de que $n \neq m_1$ entonces existe algún número no entero entre los exponentes de la serie que no puede ser expresado de manera análoga a k_1 . Sea k_2 el más pequeño de los exponentes que no pueden ser expresados como k_1 , se tiene que $k_2 = \frac{n_2}{m_1 \cdot m_2}$ si

$n \neq m_1 \cdot m_2$ se continuaría este proceso definiendo de manera análoga definiendo k_3, \dots, k_g hasta que finalmente se tuviese (se sabe que tiene que ocurrir en un número finito de pasos) que $n = m_1 \cdots m_g$. Los pares $(m_1, n_1), (m_2, n_2), \dots, (m_g, n_g)$ se denominan *pares de Puiseux* de la serie. En caso de que $y(x^{\frac{1}{n}})$ sea solución de la curva $f(x, y) = 0$ se dirá que los pares de Puiseux de la serie son los pares de Puiseux de f .

Definición 3.24. La serie de Puiseux $y(x) = x^{\frac{n_1}{m_1}} + x^{\frac{n_2}{m_1 \cdot m_2}} + \cdots + x^{\frac{n_g}{m_1 \cdots m_g}} = x^{k_1} + x^{k_2} + \cdots + x^{k_g}$ se dice serie de Puiseux estándar de pares $(m_1, n_1), \dots, (m_g, n_g)$.

Definición 3.25. Sea A un toro y sea $K \subset A$ una curva cerrada simple en A , entonces, si al considerar A como un rectángulo de bordes identificados K es una recta de pendiente racional, se dirá que K es una *curva tórica* en A .

Ejemplo 3.26. Se considera la circunferencia \mathbb{S}^1 y la aplicación $\phi : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ dada por $e^{2i\pi\theta} = z \mapsto (z^{m_1}, z^{n_1}) = (e^{2i\pi m_1\theta}, e^{2i\pi n_1\theta})$, observar que si vemos la circunferencia como $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ entonces los puntos (z^{m_1}, z^{n_1}) serán los puntos de la recta $(m\theta, n\theta)$, es decir, el conjunto $\phi(\mathbb{S}^1)$ es una curva tórica. Observar que se puede realizar un razonamiento análogo a este para cualquier circunferencia de radio $\epsilon > 0$, \mathbb{S}_ϵ^1 .

Definición 3.27. Un nudo es la imagen por un difeomorfismo sobre la imagen $p : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Definición 3.28. Sea A un toro y sea $p : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función tal que $p : A \rightarrow p(A)$ es un difeomorfismo. Se dice entonces que $p(A)$ es un toro encajado.

Un caso particular de toros encajados, son los bordes de entornos regulares de nudos en \mathbb{S}^3 (por ejemplo los entornos formados por los puntos que están a distancia lo *suficientemente pequeña* del nudo).

Definición 3.29. Un *cable* de un nudo L es una curva tórica K en $p(A)$, toro encajado borde de un entorno regular de L .

Nota 3.30. En el Capítulo 4, Definición 4.15, se definirán los nudos tóricos iterados recurrentemente, como cables de otro nudo itérico iterado, empezando desde el nudo trivial

Lema 3.31. Si la curva $f(x, y) = 0$ es irreducible, y -general de orden k y tiene como solución la serie de Puiseux estándar de pares $(m_1, n_1), \dots, (m_g, n_g)$ y sea X el lugar de ceros de f , entonces, el nudo $K(f) = X \setminus \{0\} \cap \partial \mathbb{M}_\epsilon$ es un nudo tórico iterado.

Demostración. Se realizará la demostración por inducción sobre g (el número de pares de Puiseux).

Para ver que se cumple en el caso $g = 1$ ($y(x^{\frac{1}{k}}) = x^{\frac{n_1}{m_1}}$) observar que en este caso los puntos de $X \setminus \{0\} \cap \partial \mathbb{M}_\epsilon$ son de la forma (z^{m_1}, z^{n_1}) con $z \in \mathbb{S}_\epsilon^1$ y por el ejemplo 3.26 ya sabemos que es un nudo tórico.

Ahora, si se supone el resultado para $g - 1$, veamos que es cierto para g . Sea la curva $f(x, y) = 0$ que tiene como solución la serie fraccionaria $y(x^{\frac{1}{m_1 \cdots m_g}}) = x^{\frac{n_1}{m_1}} + \cdots + x^{\frac{n_g}{m_1 \cdots m_g}}$. Se observa que si se toma la curva $\tilde{f}(x, y) = 0$ que tiene como solución la serie $\tilde{y}(x) = x^{\frac{n_1}{m_1}} + \cdots + x^{\frac{n_{g-1}}{m_1 \cdots m_{g-1}}}$, entonces \tilde{f} tiene $m_1 \cdots m_{g-1}$ soluciones y por cada solución $\tilde{y}_j(x^{\frac{1}{m_1 \cdots m_{g-1}}})$ ($j = 1, \dots, m_1 \cdots m_{g-1}$ e $\tilde{y}_j(x^{\frac{1}{m_1 \cdots m_{g-1}}}) = \xi_{m_1 \cdots m_{g-1}}^j x^{\frac{n_1 \cdot m_2 \cdots m_{g-1}}{m_1 \cdot m_2 \cdots m_{g-1}}} + \cdots + \xi_{m_1 \cdots m_{g-1}}^j x^{\frac{n_{g-1}}{m_1 \cdots m_{g-1}}}$ con $\xi_{m_1 \cdots m_{g-1}}^j$ una $m_1 \cdots m_{g-1}$ -ésima raíz de la unidad) de \tilde{f} existen m_g soluciones de la función f de la forma $y(x^{\frac{1}{m_1 \cdots m_g}}) = \tilde{y}_j(x^{\frac{1}{m_1 \cdots m_{g-1}}}) + \xi_n^i x^{\frac{n_g}{m_1 \cdots m_g}}$ (con ξ_n una raíz n -ésima de la unidad, con $n = m_1 \cdots m_g$ y $i = 0, \dots, n - 1$) en cada circunferencia de centro $\tilde{y}_j(x^{\frac{1}{m_1 \cdots m_{g-1}}})$ y de radio $\epsilon^{\frac{n_g}{m_1 \cdots m_g}}$.

Si $x \in \mathbb{S}_\epsilon^1$ con $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, estas circunferencias son dos a dos disjuntas y por tanto las soluciones de f están en un toro encajado en $\partial\mathbb{M}_\epsilon$ cuya ánima es el nudo $K(\tilde{f})$, es decir, $K(f)$ es un nudo tórico iterado. \square

Proposición 3.32. *Sea $f(x, y) = 0$ una curva irreducible, y -general de orden k , tiene como solución una serie de Puiseux de pares $(m_1, n_1), \dots, (m_g, n_g)$ y sea X el lugar de ceros de f , entonces, el nudo $K(f) = X \setminus \{0\} \cap \partial\mathbb{M}_\epsilon$ es un nudo tórico iterado. Más aún, $K(f)$ es isótopo al nudo tórico iterado $K(h)$ de la función h que tiene a la serie de Puiseux estándar de pares $(m_1, n_1), \dots, (m_g, n_g)$ como solución.*

Demostración. Sea $y(x^{\frac{1}{k}}) = \sum a_h x^h$, podemos separar y en dos funciones $y = \tilde{y} + \tilde{g}$ de manera que $\tilde{y} = \sum a_{\tilde{h}} x^{\tilde{h}}$ contiene solo a los términos correspondientes a los pares de Puiseux y \tilde{g} contiene a todos los demás términos.

Entonces, notar que si \tilde{f} es la función que tiene a \tilde{y} como serie de Puiseux, entonces, cada solución de $f(z^n, y(z)) = 0$ yace en una circunferencia por el Lema 3.31, para un ϵ suficientemente pequeño, las soluciones de f son *pequeñas distorsiones* (esto es, si antes las soluciones estaban en circunferencias que no se cruzaban, ahora están cercanas a estas circunferencias, y las *circunferencias distorsionadas* donde yacen estas soluciones siguen siendo disjuntas dos a dos) de manera que el nudo $X \setminus \{0\} \cap \partial\mathbb{M}_\epsilon$ es isótopo a el nudo del Lema 3.31. \square

Nota 3.33. Observar que si X es el lugar de ceros de f , el nudo $X \setminus \{0\} \cap \partial\mathbb{M}_\epsilon$ es siempre el mismo con tal de que ϵ y δ sean suficientemente pequeños. Es decir, el nudo es único.

Definición 3.34. Sea f una función irreducible, y -general de orden k , al nudo $K = X \setminus \{0\} \cap \partial\mathbb{M}_\epsilon$ se le denominará nudo asociado a f .

Observación 3.35. Notar que el toro encajado en el que está contenido el nudo asociado a la curva $f(x, y) = 0$ que tiene a $y(x^{\frac{1}{n}}) = \sum c_i x^{k_i}$ como serie de Puiseux (recordar que $y(x)$ es convergente) es $T^+ \cap T^- = \{(x, y) \in \mathbb{C} \mid |x| = \epsilon, |y| = \delta = \delta(\epsilon) = \sqrt{\sum c_i^2 \epsilon^{2k_i}}\}$.

Nota 3.36. El Lema 3.31 y la Proposición 3.32 dan el fundamento teórico del procedimiento a seguir para determinar la forma de $X \setminus \{0\} \cap \mathbb{M}_\epsilon$. En particular, lo que dicen estos dos resultados es que para cualquier ϵ tal que $0 < \epsilon \ll 1$ se tiene que $X \setminus \{0\} \cap \partial\mathbb{M}_\epsilon$ es un nudo, de hecho, es siempre el mismo nudo. Por tanto, se tiene que $X \setminus \{0\} \cap \mathbb{M}_\epsilon$ no solo es homeomorfo a un disco (por el Teorema 3.12) sino que además el borde del *disco* $X \setminus \{0\} \cap \mathbb{M}_\epsilon$ es $K(f)$.

Ejemplo 3.37. Sea $f(x, y) = y^2 - x^5$. Es claro que es una función y -general de orden 2 cuyo lugar de ceros será $X = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = x^5\}$ de la que la serie de Puiseux $y(x^{\frac{1}{2}}) = x^{\frac{5}{2}}$ es solución. Se sabe además que para cualquier $\epsilon, \delta > 0$ suficientemente pequeños, $X \setminus \{0\} \cap \partial U_{\epsilon, \delta}$ es un nudo tórico (de hecho, todos son el mismo nudo). Se fijan ϵ y δ (es decir, se va a trabajar solamente en uno de los conjuntos $X \setminus \{0\} \cap \partial U_{\epsilon, \delta}$), se ha visto ya que $\forall (x, y) \in X \setminus \{0\} \cap \partial U_{\epsilon, \delta}$ se tiene que $x = x(t) = \epsilon e^{2i\pi t}$ con $t \in [0, 1]$ por ser $X \setminus \{0\} \cap \partial U_{\epsilon, \delta}$ espacio recubridor de una circunferencia de centro 0 contenida en $D_\delta \setminus \{0\}$, por tanto, desde que $y(x) = x^{\frac{5}{2}}$ es solución, las funciones de t :

$$y_1(t) = e^{2i\pi \frac{5}{2}t}$$

$$y_2(t) = -e^{2i\pi \frac{5}{2}t}$$

Son soluciones de la curva $f(x(t), y) = 0$, es decir, por cada $x(t)$ la curva tiene dos soluciones. De aquí se deduce que los grafos de las soluciones en función de t están en el cilindro $[0, 1] \times \mathbb{S}_\epsilon^1$.

La proyección de la figura en el plano será:

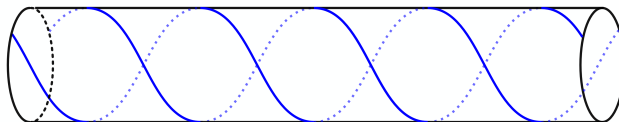


Figura 3.1:

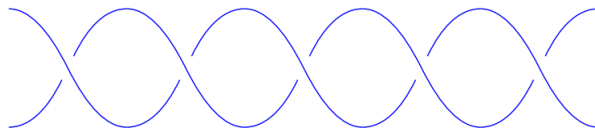


Figura 3.2:

Identificando los extremos de la figura anterior se tiene el nudo asociado a la serie de Puiseux $y(x^{\frac{1}{2}}) = x^{\frac{5}{2}}$.

Se observa además que tenemos una función multivaluada que asocia a cada t dos soluciones $(x(t), y_1(t))$, $(x(t), y_2(t))$. Para trabajar con estas soluciones se desea conseguir una solución que asocie a cada t una única solución. Gracias a las parametrizaciones de Puiseux tenemos una manera de hacerlo. Se considera la parametrización de Puiseux como una composición de dos aplicaciones $z \mapsto z^2 \mapsto (z^2, z^5)$. como z es un elemento de la circunferencia ($z(t) = e^{2i\pi t}$, $t \in [0, 1]$) entonces se tiene que z^2 es $z^2(\tilde{t}) = e^{2i\pi\tilde{t}}$ con $\tilde{t} \in [0, 2]$, en particular, tenemos que para cada \tilde{t} existe una única solución de la curva $(z^2(\tilde{t}), y(\tilde{t})) = (e^{2i\pi\tilde{t}}, e^{5i\pi\tilde{t}})$.

Ejemplo 3.38. Se va a trabajar con $f(x, y) = (y^2 - x)^2 - x^3y = y^4 - 2y^2x + x^2 - x^3y$. Se tiene que $\text{Pn}(f) = \{(0, 4), (2, 0), \ell_{(0,4)}^{(3,0)}\}$, entonces $0 + \mu_0 4 = 2 + \mu_0 0 = 2$ y por tanto $\mu_0 = \frac{1}{2}$, realizando el cambio de variable $y = tx^{\mu_0}$ se tiene que $f(x, tx^{\mu_0}) = x^2(t^2 - 2t + 1)$. En este caso solo podemos seleccionar una raíz $t_0 = 1$ y entonces sabemos que realizando los cambios $x_1 = x^{\frac{1}{2}}$, $y = x_1(1 + y_1)$ se tiene que

$$f(x, y) = f(x_1^2, x_1(1 + y_1)) = x^4 f_1(x_1, y_1) = x^4 (y_1^4 - x_1^3 + 4y_1^3 - x_1^3 y_1 + 4y_1^2).$$

Repitiendo el proceso con f_1 (ver Figura 3.3) se llega a que

$$\begin{aligned} f_1(x_1, y_1) &= f_1(x_2^2, x_2^3(\frac{1}{2} + y_2)) = x^6 f_2(x_2, y_2) = \\ &= x^6 (x_2^6 y_2^4 + 2x_2^6 y_2^3 + \frac{3}{2}x_2^6 y_2^2 + \frac{1}{2}x_2^6 y_2 + \frac{1}{16}x_2^6 + 4x_2^3 y_2^3 + 6x_2^3 y_2^2 + 2x_2^3 y_2 + 4y_2^2 + 4y_2). \end{aligned}$$

Observar que $(0, 1) \in \text{Pn}(f_2)$, y por tanto si bien no tenemos una solución completa de f esta será una serie de Puiseux $y(x^{\frac{1}{4}})$ de pares de Puiseux $(2, 1), (2, 3)$.

Para construir el nudo asociado a f , se calcula primero el nudo asociado a la función \hat{f} cuya serie de Puiseux es $\tilde{y} = x^{\frac{1}{2}}$, trabajando como en el ejemplo anterior se tiene que la curva $f(x, y) = 0$ tendrá una única solución para cada $\tilde{t} \in [0, 2]$ que será $(z^2(\tilde{t}), y(\tilde{t})) = (z^2(\tilde{t}), z(\tilde{t})) = (e^{2i\pi\tilde{t}}, e^{i\pi\tilde{t}})$ (ver Figura 3.4)

Ahora, consideramos la función \hat{f} cuya serie de Puiseux es $\hat{f} = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2.2}}$ que sabemos que tiene el mismo nudo asociado que f .

Se tiene que, en este caso la parametrización de Puiseux es $z \mapsto (z^4, z^2 + z^3)$, en particular, la curva $f(x, y) = 0$ tiene una sola solución para cada $\tilde{t} \in [0, 4]$ que es $(z^4(\tilde{t}), y(\tilde{t})) = (z^4(\tilde{t}), z^2(\tilde{t}) + z^3(\tilde{t})) = (e^{2i\pi\tilde{t}}, e^{i\pi\tilde{t}} + e^{\frac{3}{2}i\pi\tilde{t}})$, las soluciones estarán en el toro encajado cuya

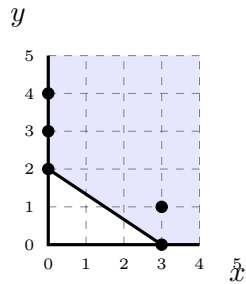


Figura 3.3:

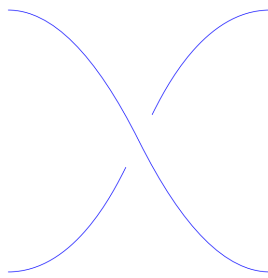


Figura 3.4:

ánima sea el nudo asociado a \tilde{f} , se tendrá, finalmente, que la proyección de las soluciones en dicho toro es:

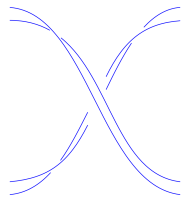


Figura 3.5:

Para hallar el nudo que se buscaba basta con identificar los extremos de esta proyección.

Se observa que este nudo es isotopo al nudo de $h = y^2 - x^5$. Hay una explicación para esto. Si en $f = (y^2 - x)^2 - xy^3$ se realiza el cambio de variable $x \mapsto x_1 + y^2$ se tiene entonces que la función en las nuevas variables $\tilde{f}(x_1, y) = f(x_1 + y^2, y) = x_1^2 - (x_1 + y^2)y^3 = x_1^2 - x_1y^3 - y^5$ es una función y -general de orden 2 cuyo polígono de Newton es $\text{Pn}(\tilde{f}) = \{(2, 0), (0, 5), \ell_{(0,5)}^{(2,0)}\}$. Realizando el proceso anterior se llegará a que la serie de Puiseux es una serie fraccionaria $y(x^{\frac{1}{2}})$ de par $(2, 5)$ y por tanto su nudo asociado es el nudo de h . Como la curva definida por \tilde{f} y f es la misma, tendremos que el nudo de f también será el de h .

Capítulo 4

Nudos Tóricos Iterados

4.1 Introducción

Ya se ha visto cómo construir el nudo asociado a un germen de curva. El problema es que la construcción de dicho toro puede ser muy complicada ya que requiere evaluar las soluciones de la curva en el cilindro $[0, 1] \times \mathbb{S}_\epsilon^1$. Además hemos visto que dos funciones cuyas series de Puiseux tienen pares distintos pueden tener nudos iguales. En este capítulo se resolverán ambos problemas utilizando las nociones de función normalizada y de germen y -general. Se probará que toda singularidad se puede describir con una función y -general cuyo orden es su multiplicidad (función normalizada) y que los pares de Puiseux de tales gérmenes determinan su nudo.

4.2 Funciones normales

Definición 4.1. Dada una función $f(x, y)$ irreducible e y -general, se dice que f está *normalizada* o que es *normal* si la multiplicidad de f y el orden de f coinciden.

Los siguientes resultados se siguen de las definiciones.

Proposición 4.2. Si una curva viene dada por una función f irreducible, y -general de orden k entonces f será normal si y solo si la curva $f(x, y) = 0$ tiene como solución una serie de Puiseux de la forma $y(x^{\frac{1}{k}}) = cx^\alpha + (\text{términos de mayor orden})$ con $c \neq 0$ y $\alpha \geq 1$.

Lema 4.3. Sea la curva irreducible dada por la función f , con f y -general de orden k . Entonces es posible realizar un cambio de variables lineal de manera que la curva venga dada por una función normal.

Proposición 4.4. Si una misma curva viene dada por dos funciones f, \tilde{f} irreducibles, y -generales de ordenes k, \tilde{k} y normales entonces f y \tilde{f} tienen los mismos pares de Puiseux.

Observación 4.5. En particular se tiene que f y \tilde{f} son funciones y -generales del mismo orden.

Definición 4.6. Diremos que K es el nudo asociado a la serie de Puiseux $y(x^{\frac{1}{k}}) = x^{\frac{n_1}{m_1}} + \dots + x^{\frac{n_g}{m_1 \cdots m_g}}$ con $\frac{n_1}{m_1} \geq 1$ si $K = K(f)$ con f la función normalizada que tiene a $y(x^{\frac{1}{k}}) = x^{\frac{n_1}{m_1}} + \dots + x^{\frac{n_g}{m_1 \cdots m_g}}$ como serie de Puiseux.

Nota 4.7. En lo que sigue, se supondrá siempre que f está normalizada. En particular, siempre que se tenga una curva $f(x, y) = 0$ irreducible e y -general de orden k , supondremos que su serie de Puiseux será de la forma $y(x^{\frac{1}{k}}) = cx^\alpha + (\text{términos de mayor orden})$ con $c \neq 0$ y $\alpha \geq 1$.

4.3 El problema de los ejes.

En el capítulo anterior se ha visto que los nudos asociados a una curva $f(x, y) = 0$ son nudos tóricos iterados. En particular, los nudos asociados a una curva vienen dados por número de veces que cruzan dos ejes en el toro $T^+ \cap T^-$. Se desea fijar estos dos ejes de manera que la caracterización los nudos tóricos iterados (o al menos los nudos tóricos iterados con los que se está trabajando) sea *simple*.

Nota 4.8. Desde que un toro encajado es $h(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$ con h difeomorfismo, parece natural usar como ejes los círculos $h(t_1 \times \mathbb{S}^1)$ y $h(\mathbb{S}^1 \times t_2)$, sin embargo, estos ejes no son demasiado útiles para caracterizar los nudos con los que se está trabajando ya que para poder describir las iteraciones del nudo $K(f) \subset T^+ \cap T^-$ se necesitarían primero las iteraciones del nudo $h^{-1}(K(f))$ y además se necesitaría tener la función h de manera explícita.

En particular, estos dos ejes solo serán útiles cuando el nudo asociado a f no solo sea un nudo tórico iterado sino además un nudo tórico (y por tanto vive en un toro encajado que además es un toro, en particular, h es la función identidad), y por lo visto en las demostraciones del Lema 3.31 y de la Proposición 3.32 se sabe que esto solo ocurre (por ser f normal) cuando f tiene un solo par de Puiseux.

Puesto que en todos los demás casos no se dispone de ninguno de los dos datos anteriores (y aunque se calculase explícitamente h esta función podría ser extremadamente complicada), es preferible buscar otros ejes, unos ejes que tengan en cuenta la forma del toro encajado $T^+ \cap T^-$ en \mathbb{R}^3 .

Definición 4.9. Sea K un nudo tórico iterado y sea $T = h(\mathbb{S}_\epsilon^1 \times D_\delta)$ un toro sólido encajado tal que $K \subset T$ se dirá entonces que T es un entorno tubular de K .

Definición 4.10. Sea $f(x, y) = 0$ una curva irreducible e y -general de orden k . Sea $\mathbb{S}^3 = T_+ \cup T_-$ la descomposición de la esfera en dos toros sólidos, desde que estos son homeomorfos a T^+ y T^- los toros sólidos en los que se descompone $\partial \mathbb{M}_\epsilon$ y el toro donde se encuentra $K(f)$ es $T^+ \cap T^-$ a partir de cierto $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño. En particular se puede considerar el nudo asociado a f , $K(f)$ (recordar que no depende de ϵ), como un nudo contenido en $T_+ = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$ (con \mathbb{D}^2 el disco unidad cerrado). Sea T un entorno tubular de $K(f)$ tal que $T \subset T_+$ se tiene que para cada $t \in \mathbb{S}^1$ la intersección $T \cap (\{t\} \times \mathbb{D}^2)$ es una familia de discos $D_i(t)$ disjuntos dos a dos alrededor de los puntos $p_i(t)$ de $K(f) \cap (\{t\} \times \mathbb{D}^2)$. Observar que el radio de estos discos será constante para cualquier i y para cualquier $t \in \mathbb{S}^1$. Fijado un $D_i(t)$, se definirá el *eje longitud* del entorno tubular T de $K(f)$ como el derivado de dicho $D_i(t)$.

Definición 4.11. En la situación de la definición 4.10, se toman, para cada i , un $q_i(t) \in \partial D_i(t)$ de manera que $q_i(t) - p_i(t)$ tienen dirección constante $\forall t$. Se define el *eje latitud* de T como el conjunto de todos los $q_i(t)$.

Definición 4.12. A los ejes de longitud y latitud de T se les llamará *ejes de coordenadas* de T .

Observación 4.13. En el caso de que se este trabajando con un nudo tórico K , se tiene que los ejes de coordenadas de T serán los círculos $t_1 \times \mathbb{S}^1$ y $\mathbb{S}^2 \times t_2$ de manera que, abordando de esta manera el problema, mantenemos los *ejes intuitivos* cuando estos son útiles, y utilizamos unos nuevos ejes en los demás casos.

Nota 4.14. Observar que si T es un entorno tubular de $K(f)$, entonces el toro en el que se encuentra el soporte de $K(f)$, $T^+ \cap T^-$ es isotopo a ∂T . En particular, podemos definir los ejes longitud y latitud de $T^+ \cap T^-$ como los ejes longitud y latitud de T .

Definición 4.15. Se introduce a continuación la siguiente definición recursiva. Se dice que el nudo trivial $\mathbb{S}^1 \times \{0\} \subset \mathbb{S}^1 \times D^2 \subset \mathbb{S}^3$ es un *nudo tórico iterado de orden 0*.

Un cable K en ∂T , con T un entorno tubular del toro de orden 0 se dice un *nudo tórico iterado* de orden 1 de tipo (m_1, n_1) donde, si a y b son los ejes latitud y longitud de T respectivamente, entonces m_1 es el cardinal del conjunto $a \cap K$ y n_1 es el cardinal de $b \cap K$.

En general, dado un nudo tórico iterado K_g de orden g y de tipo $(m_1, n_1), \dots, (m_g, n_g)$ si K_{g+1} es un cable en ∂T con T entorno tubular de K_g tal que si a y b son los ejes latitud y longitud de T y m_{g+1} y n_{g+1} son los cardinales de los conjuntos $a \cap K_{g+1}$ y $b \cap K_{g+1}$ respectivamente, entonces se dirá que K_{g+1} es un *nudo tórico iterado* de orden $g+1$ y de tipo $(m_1, n_1), \dots, (m_g, n_g), (m_{g+1}, n_{g+1})$.

Observación 4.16. Solamente existe un nudo tórico iterado que tenga más de un orden: el nudo trivial (que puede expresarse como nudo de orden 0 o bien de orden 1 y de tipo $(1, 0)$). Por construcción, m_i y n_i siempre serán finitos para cualquier par (m_i, n_i) .

Lema 4.17. *Dados dos nudos de orden g estos serán isótopos si y solo si son del mismo tipo.*

Proposición 4.18. *El nudo asociado a la serie de Puiseux $y(x^{\frac{1}{k}}) = x^{\frac{n_1}{m_1}} + \dots + x^{\frac{n_g}{m_1 \dots m_g}}$ con pares de Puiseux $(m_1, n_1), \dots, (m_g, n_g)$ es el nudo de orden g y de tipo $(m_1, n_1), \dots, (m_g, n_g)$.*

Demostración. La demostración se realizará por inducción sobre los g pares de Puiseux de y . Recordemos que por hipótesis, las fracciones $\frac{n_i}{m_1 \dots m_i}$ son irreducibles y $k = m_1 \dots m_g$.

Veamos que se cumple para el caso $g = 1$. En este caso, la parametrización es del tipo (z^{m_1}, z^{n_1}) , con $z = e^{2\pi it}$, $t \in [0, 1]$. Observemos que $K = \{(z^{m_1}, z^{n_1}) \mid t \in [0, 1]\}$ está contenido en el toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ y que el corte de K con $a = \{x_0\} \times \mathbb{S}^1$ consiste en los m_1 puntos $(x_0, \xi_{m_1}^j z_0^{n_1})$ donde $z_0^{m_1} = x_0$ y $j = 0, \dots, m_1 - 1$ (aquí estamos usando fuertemente que m_1 y n_1 son primos entre sí, es decir, que la fracción $\frac{n_1}{m_1}$ es irreducible). Del mismo modo el corte de K con $b = \mathbb{S}^1 \times \{y_0\}$ consiste en n_1 puntos. Por tanto K es un nudo tórico de orden 1 y tipo (n_1, m_1) .

Veamos ahora que si se cumple para $g - 1$ entonces se cumple para g .

Sea $y(x^{\frac{1}{k}}) = x^{\frac{n_1}{m_1}} + \dots + x^{\frac{n_g}{m_1 \dots m_g}}$ dado que se satisface el resultado para $\tilde{y}(x^{\frac{1}{k_1}}) = x^{\frac{n_1}{m_1}} + \dots + x^{\frac{n_{g-1}}{m_1 \dots m_{g-1}}}$ (con $k_1 = \frac{k}{m_g}$), se considera el nudo tórico iterado K_{g-1} asociado, que es de la forma $(z^{k_1}, \tilde{y}(z))$. Obsérvese que una parametrización de K_g viene dada de la siguiente forma $(w^{m_g}, \tilde{y}(w^{m_g}) + w^{n_g})$ donde $w^{m_g} = z$, que es de tipo tórico (n_g, m_g) con respecto al toro sobre K_{g-1} .

Y con esto se tiene el resultado deseado. □

Se puede ver (véase [1, página 25]) el siguiente resultado:

Proposición 4.19. *Dos nudos serán isótopos solo cuando sean del mismo orden y tipo (esto es, cuando los pares de sus series de Puiseux correspondientes sean iguales).*

De aquí se sigue inmediatamente el siguiente resultado:

Corolario 4.20. *Dados dos gérmenes de conjuntos analíticos (X_1, x) y (X_2, x) de curvas irreducibles, entonces estas serán topológicamente equivalentes solo cuando sus series de Puiseux asociadas tengan los mismos pares.*

Demostración. Se sabe que los dos gérmenes serán equivalentes solo cuando existan $X \in (X_1, x)$ y $Y \in (X_2, x)$ tales que $X \cap \mathbb{M}_\epsilon$ y $Y \cap \mathbb{M}_\epsilon$ sean nudos isótopos lo cual ocurrirá solamente cuando tengan los mismos pares de Puiseux. □

Definición 4.21. Dadas r circunferencias disjuntas $\mathbb{S}_1^1, \dots, \mathbb{S}_r^1$ se dice que $h : \sqcup \mathbb{S}_i^1 \rightarrow X$ es un *encaje* en la variedad diferenciable X si h es un difeomorfismo sobre la imagen.

Un encaje de 1 circunferencia en la esfera \mathbb{S}^3 se llama *nudo*. Si $r > 1$ este encaje se denomina *enlace*.

Observamos que un enlace admite una proyección sobre el plano \mathbb{R}^2 genérica por la cual los cruces sean transversales, es decir, en cada intersección solo haya dos ramas y las direcciones tangentes sean distintas. Dada una proyección genérica, en cada cruce podemos indicar qué rama cruza por arriba y cuál por abajo en el enlace original. A una proyección de este modo con indicaciones en los cruces se le llamará *diagrama* del enlace (ver Figura 4.1¹).

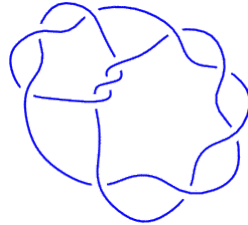


Figura 4.1: Diagrama de un nudo

Definición 4.22. Dado un diagrama orientado, a cada cruce le puede asociar el valor $+\frac{1}{2}$ o bien $-\frac{1}{2}$ según cual de las cuatro situaciones siguientes (ver Figura 4.2²) se tenga:

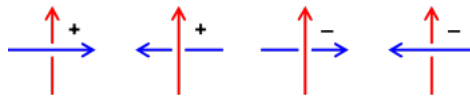


Figura 4.2:

Se dirá que el *número de enlace* de $h(\mathbb{S}_1^1)$ y $h(\mathbb{S}_2^1)$ es la suma de todos los valores asociados a cada cruce.

En general se tiene el siguiente resultado:

Teorema 4.23. *Dos gérmenes de curvas (X, x) y (X_2, x) serán topológicamente equivalentes si y solo si existe una biyección entre componentes irreducibles satisfaciendo las siguientes dos propiedades:*

1. *Los pares de Puiseux de las correspondientes componentes son iguales.*
2. *El número de enlace de las correspondientes componentes coincide dos a dos.*

Demostración. (véase [1, página 25])

□

¹Imagen tomada de https://katlas.org/wiki/Printable_Manual

²Imagen tomada de https://en.wikipedia.org/wiki/Linking_number

Bibliografía

- [1] E. Brieskorn and H. Knörrer, *Plane algebraic curves*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1986, Translated from the German by John Stillwell.
- [2] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, second ed., Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1995, With contributions by A. Zelevinsky, Oxford Science Publications.
- [3] W.S. Massey, *Introducción a la topología algebraica*, Reverté, Barcelona, 1982.
- [4] O. Zariski and P. Samuel, *Commutative algebra. Vol. II*, Springer-Verlag, New York, 1975, Reprint of the 1960 edition, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 29.

